

Erich Ch. WITTMANN, Dortmund

Strukturgenetische didaktische Analysen – die empirische Forschung erster Art

Heinrich Winter in Freundschaft gewidmet

In einer Stellungnahme zu einer Kritik des Autors an den VERA-Tests haben Kristina Reiss u.a. festgestellt: "Herr Wittmann vertritt eine Richtung, von der sich weite Teile der deutschen Mathematikdidaktik verabschiedet haben." In dieser Aussage wird eine Überlegenheit der „empirischen Wende“ der Mathematikdidaktik postuliert, für die es nach Auffassung des Autors keinen sachlichen Grund gibt: Anknüpfend an die „Stoffdidaktik“ hat sich in den letzten Jahrzehnten eine „Mathematikdidaktik vom Fach aus“ entwickelt, von der die Unterrichtsentwicklung und die Lehrerbildung weiterhin getragen werden. Das Projekt „mathe 2000“ ist hierfür ein Beispiel (WITTMANN 2012). Diese „Mathematikdidaktik vom Fach aus“ ist keineswegs eine „Didaktik am grünen Tisch“, wie von der traditionellen Stoffdidaktik mit einem gewissen Recht behauptet werden konnte, sondern ist auf eigene Weise empirisch untermauert. Dies soll im vorliegenden Beitrag gezeigt werden: In den drei ersten Abschnitten wird an zentralen Themen der Grundschuldidaktik die Leistungsfähigkeit der heute vorherrschenden, auf importierten Theorien und Methoden beruhenden Richtung mit der Leistungsfähigkeit der mathematisch fundierten Richtung der Mathematikdidaktik verglichen. Im vierten Abschnitt wird die *strukturgenetische didaktische Analyse* beschrieben, die sich als Forschungsmethode der mathematisch fundierten Mathematikdidaktik herausgebildet hat.

1. Einführung der Multiplikation

In der angelsächsischen Didaktik ist das Erlernen des Einmaleins Malreihe für Malreihe tief verankert. Die Multiplikation wird dort sogar als „repeated addition“ definiert. In den letzten Jahren hat in England und den USA eine intensive Diskussion darüber stattgefunden, was die Multiplikation wirklich ist. In diesen Kontext gehört die empirische Untersuchung von PARK & NUNES (2001), in der zwei Hypothesen der Begriffsbildung bei der Multiplikation verglichen wurden: die Begründung der Multiplikation als „repeated addition“ bzw. als „schema of correspondences“. Als Ergebnis wird festgestellt, dass auf „repeated addition“ nur als Rechenverfahren, nicht als Grundlage der Multiplikation zurückgegriffen werden sollte.

Aus der Sicht der Mathematikdidaktik vom Fach aus stellt sich die Situation wie folgt dar: In seiner operativen Rechendidaktik definierte Arnold

Fricke die Multiplikation zwar als verkürzte Addition. Die Berechnung der Einmaleinsergebnisse erfolgte aber nicht als „repeated addition“, sondern mit Hilfe der Rechengesetze ausgehend von den leichten Kernaufgaben (FRICKE 1970). Bei seiner Forderung nach „algebraischer Durchdringung der Arithmetik“ hat Heinrich Winter den Vorschlag gemacht, die Multiplikation auf rechteckige Punktfelder zu gründen (WINTER 1984). Dies führte zu einem weiteren signifikanten Fortschritt, da sich mit Punktfeldern *alle* Rechengesetze der Multiplikation operativ begründen lassen.

Folgerung aus dem Vergleich: Was die Multiplikation ist und wie sie im Unterricht behandelt werden soll, kann nicht mit den empirischen Methoden der Psychologie entschieden werden, sondern nur vom Fach aus.

2. Die Hundertertafel

Die Hundertertafel ist ein seit Jahrhunderten bewährtes Darstellungsmittel der Zahlen von 1 bis 100. Daher ist es überraschend, dass sie und Unterrichtswerke, in denen sie verwendet wird, in jüngster Zeit kritisiert werden. Die Kritik geht von den angeblich durch die Kognitionspsychologie und Hirnforschung empirisch belegten Behauptungen aus, die Zahlen seien im Gehirn als Längen repräsentiert, der kardinale Aspekt sei neben dem ordinalen Aspekt zu vernachlässigen und Addition und Subtraktion seien mit dem Vor- und Zurückrücken auf der Zahlenreihe zu identifizieren (LORENZ 2005). Es ist offenkundig, dass die Hundertertafel nicht in dieses Konzept passt. Dies spricht aber keineswegs gegen dieses Darstellungsmittel. In WITTMANN & MÜLLER 2012 (S. 20 - 21) wird die Hundertertafel in Verbindung mit dem Hunderterfeld in mathematisch wohl begründeter Weise benutzt um das *Stellenwertprinzip* zu untermauern und die Oehlsche Balken- /Punktdarstellung für Zehner und Einer herzuleiten, die für die „algebraische“ Begründung der Addition und Subtraktion tragend ist. Im Tausenderraum dienen Tausenderbuch und Tausenderfeld analog dazu, um den Hunderter als weitere Zahleneinheit darzustellen und zu Zehnern und Einern in Beziehung zu setzen. Die Hundertertafel und das Tausenderbuch sind darüber hinaus auch optimal geeignet um die Menge der Zahlen von 1 bis 100 bzw. von 1 bis 1000 übersichtlich darzustellen und um zahlentheoretisch wichtige Beziehungen zwischen Zahlen zu verdeutlichen.

Folgerungen aus dem Vergleich: Ob die Hundertertafel in einem didaktischen Konzept sinnvoll ist oder nicht, kann nur unter Berücksichtigung der Struktur des Faches entschieden werden. Die Reduktion des Zahlbegriffs auf den ordinalen Aspekt steht im eklatanten Widerspruch zur mathematischen Praxis und stellt didaktische Konzepte, die darauf setzen, in Frage.

3. Design einer Lernumgebung zur produktiven Übung der Addition

Bei den beiden ersten Beispielen ging es nur um begriffliche Bausteine für das Lehren und Lernen bestimmter Themen. Das dritte Beispiel führt mitten in den Kernbereich der Didaktik. Der natürliche Weg um Lernende zum Erwerb mathematischen Wissens und mathematischer Fähigkeiten anzuleiten besteht darin, ihnen substanzielle Lernumgebungen anzubieten, in denen sie mathematisch aktiv werden können. Das Üben spielt dabei eine Schlüsselrolle. Heinrich Winter ist das Konzept des „produktiven Übens“ zu verdanken, das die gleichzeitige Förderung inhaltlicher und allgemeiner Lernziele („Kompetenzen“) beinhaltet (WINTER 1984).

Bei der Neubearbeitung eines Unterrichtswerks stellte sich die Aufgabe eine substanzielle Lernumgebung zur produktiven Übung der schriftlichen Addition zu konstruieren. Es ist a priori klar, dass dabei importierte Theorien und Methoden völlig versagen. Man kommt nur zu einer Lösung, wenn man sich an das Fach hält. Für die Entwicklung der Lernumgebung (s. WITTMANN & MÜLLER 2012, S. 85, 120-121) musste die Elementarmathematik nach Mustern durchforstet werden, die bei der schriftlichen Addition auftreten. Dann war zu prüfen, ob die Voraussetzungen der Kinder am Ende des 3. Schuljahrs ausreichen um die intendierte Aufgabenstellung zu verstehen, die angeregten Operationen auszuführen, die zu beobachtenden Muster zu erkennen, zu beschreiben und mit Hilfe der Lehrperson anhand vertrauter Arbeitsmittel zu begründen. Schließlich war die Lernumgebung auch noch curricular einzuordnen.

4. Die strukturalgenetische didaktische Analyse

Die bei den Beispielen angewandte Forschungsmethode ist eine Weiterentwicklung der Stoffdidaktik. Da sie sich anders als die traditionelle Stoffdidaktik nicht auf die logische Analyse des Stoffes beschränkt, sondern ausdrücklich auch *Prozesse* einbezieht, möchte ich sie als *strukturalgenetische didaktische Analyse* bezeichnen. Die Beispiele zeigen, dass sich diese Methode an Fakten hält: an die mathematische Praxis bei der Erforschung, Beschreibung und Begründung von Mustern, an die Lernvoraussetzungen der Kinder, an die Zielsetzungen des Unterrichts und an das Curriculum. Das alles ist *empirisches Material*. Daher ist die strukturalgenetische Analyse eine *empirische* Methode. Sie darf wegen ihrer Ursprünglichkeit mit Recht als empirische Forschung „*erster Art*“ bezeichnet werden. Zu behaupten, nur die üblichen empirischen Forschungen, die ich als empirische Forschungen „*zweiter Art*“ bezeichne, würden „empirisch abgesicherte Modelle“ für das Lehren und Lernen liefern, zeugt von Unkenntnis der wahren Verhältnisse.

Strukturgenetische didaktische Analysen sind aus folgenden Gründen für die Mathematikdidaktik von primärer Bedeutung und daher unverzichtbar:

- Sie gründen auf der *mathematischen Praxis* der jeweiligen Stufe.
- Sie fördern ein aktives Verhältnis zum *lebendigen Fach*.
- Sie sind *konstruktiv*.
- Sie sind *für das Unterrichten handlungsleitend*, da sie die im Fach „eingefrorenen didaktischen Momente“ (HEINTEL 1978), d.h. die im wohlverstandenen Fach enthaltene *natürliche Theorie des Lehrens und Lernens*, zur Geltung bringen.
- Ihre Ergebnisse sind in der Lehrerbildung im Gegensatz zu vielen Ergebnissen der „Forschungsdidaktik“ *in verständlicher Weise kommunizierbar*. Die Rückmeldungen aus der Praxis sprechen hier eine deutliche Sprache.

Als Musterbeispiele strukturgenetischer didaktischer Analysen sind WHEELER 1963, FREUDENTHAL 1983 und das Gesamtwerk von Heinrich Winter, insbesondere WINTER 1987, zu nennen. An ihnen muss sich die Mathematikdidaktik orientieren um nicht weiter in ein von der Praxis entferntes selbstreferentielles System zu degenerieren.

Literatur

- Freudenthal, H. (1983): Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: Reidel
- Fricke, A. (1968): Operative Lernprinzipien. In: Fricke, A. & Besuden, H. (1970): Mathematik. Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart: Klett, 79 - 116
- Heintel, P. (1978): Modellbildung in der Fachdidaktik. Klagenfurt: Carinthia
- Lorenz, J.H. (2009): Grundlagen der Förderung und Therapie. In: von Aster, M. & Lorenz, J.H. (Hg.): Rechenstörungen bei Kindern. Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht, 165 - 177
- Park, J.H., Nunes, T. (2001): The Development of the Concept of Multiplication. Cognitive Development 16, 763 – 773
- Wheeler, D. (ed.) (1967): Notes on Primary Mathematics. London: CUP (deutsch: Modelle für den Mathematikunterricht der Grundschule. Stuttgart: Klett 1970)
- Winter, H. (1984): Begriff und Bedeutung des Übens. mathematik lehren H.2, 4 – 11
- Winter, H. (1987): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Wiesbaden: Vieweg
- Wittmann, E.Ch. (2012): Das Projekt „mathe 2000“: Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In: Müller, G.N., Selzer, Ch. & Wittmann, E.Ch. (Hg.): Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben. Stuttgart: Klett, 263 – 279
- Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2012): Das Zahlenbuch, Band 2. Stuttgart: Klett
- Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2013): Das Zahlenbuch, Band 3. Stuttgart: Klett